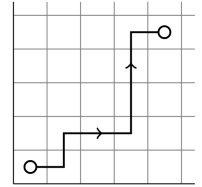


10. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

1° Черепашка сидит в левой нижней клетке клетчатого поля, бесконечного вправо и вверх. Каждым ходом она может сдвинуться либо вправо, либо вверх в соседнюю по стороне клетку. Напишем в каждой клетке число способов, которыми черепашка может добраться до этой клетки из левой нижней.



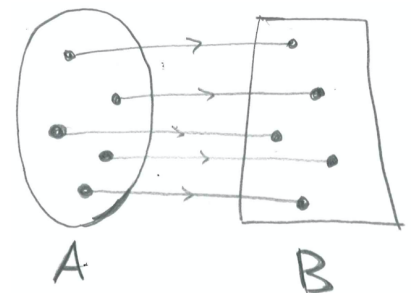
- а) Что за числа стоят в самой нижней строке? Следующей за ней строке?
 б) Докажите, что каждое число — это сумма его соседа слева и соседа снизу.
 в) Заполните угловой квадрат 5×5 таблицы.

2° На бесконечной клетчатой полоске сидит жук. Он хочет сделать 10 прыжков, каждый раз прыгая на соседнюю клетку, и вернуться в начало. Сколькими способами он может это сделать?

В актовом зале была толпа школьников (множество A) и гора стульев (множество B). Как понять, кого больше, школьников или стульев? Можно попросить каждого школьника сесть на один из стульев!

Допустим, все школьники сели на разные стулья, стульев всем хватило и пустых стульев не осталось. Тогда каждому школьнику *соответствует* стул, на котором он сидит. А каждому стулу *соответствует* школьник, сидящий на нём.

В таких случаях говорят, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно-однозначное соответствие*.



3° [письменно!] Установите взаимно-однозначные соответствия между элементами следующих множеств:

- ★ множество сочетаний из n по k , т.е. способов выбрать k объектов из n объектов;
- ★ множество слов длины n , составленных из букв A и B , в которых ровно k букв A ;
- ★ множество путей из клетки $(1, 1)$ в $(k + 1, n - k + 1)$ с шагами только вправо или вверх.

Определение. *Биномиальным коэффициентом* или *числом сочетаний* из n по k называется количество элементов в любом из этих трех множеств. Оно обозначается как $\binom{n}{k}$.

В этом листке **нельзя пользоваться формулой для биномиальных коэффициентов** через факториалы.

4° Сформулируйте определение биномиальных коэффициентов на языке множеств.

5° Треугольником Паскаля называется треугольная таблица, составленная по следующему правилу. Строка с номером n состоит из n чисел, первое и последнее числа равны единице, а каждое из остальных — сумме двух ближайших к нему чисел в предыдущей строке. Докажите, что в этой таблице написаны числа сочетаний.

			1			
		1	1			
	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
	1	5	10	10	5	1
						

6° Вычислите значение 101^7 без использования калькулятора.

7° Бином Ньютона а) Раскройте скобки в выражении $(a + b)^n$ для $n = 1, 2, 3, 4$.

б) Выразите $(a + b)^n$ через биномиальные коэффициенты

В задачах 9-13 требуется привести *комбинаторное доказательство*. Вам нужно придумать задачу, найти ее ответ двумя способами, и таким образом получить комбинаторное тождество.

8° Докажите хотя бы одно тождество из 9-13, используя определение $\binom{n}{k}$ как числа

а) сочетаний; б) слов из букв A и B ; в) путей.

9° Докажите, что: а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$;

10° В классе учится n человек. Для игры нужно выбрать k участников и 1 ведущего.

а) Найдите ответ в задаче и докажите, что $\binom{n}{k}(n - k) = \binom{n}{k+1}(k + 1)$.

б) Докажите, что числа в строке Δ -ка Паскаля сначала возрастают, потом убывают.

11° [письменно!] Имеется n карточек с разными буквами.

а) Сколько слов длины n можно составить из этих карточек?

б) А сколько слов длины k ? в) Найдите формулу для $\binom{n}{k}$.

12 Выразите число последовательностей из 0 и 1 без двух нулей подряд длины n через биномиальные коэффициенты.

13 Найдите значения выражений:

а) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$; б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$;

в) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$; г) $\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$.

д) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k}$; е) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} - \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

14 Используя только определение треугольника Паскаля, докажите

а)° хотя бы одно б) все тождества из задачи 13.

15 Используя только алгебраические свойства Бинома Ньютона, докажите

а)° хотя бы одно б)* все тождества из задачи 13.

16 На какое максимальное число частей могут разбить а) n прямых плоскость

б) n плоскостей пространство в)* n гиперплоскостей k -мерное пространство?